PHYSICS

1. $$y = A\sin(\omega t + \phi)$$

जब समय चरम स्थिति $y = A$ से मापना प्रारम्भ किया जाता है $(t = 0)$, तब

$$A = A\sin(0 + \phi) \quad \text{यानि } \phi = (\pi/2)$$

अत: गति का समीकरण होता जाता है :

$$y = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t$$

अब यहाँ पर $y = (A/2)$, अत:

$$(A/2) = A\cos\omega t \text{ यदि, } \omega t = \cos^{-1}(1/2)$$

या $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}$ या $t = \frac{T}{6}$

6. $$K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2\omega t$$

$$= \frac{1}{4}m\omega^2 A^2(1 + \cos 2\omega t) = \frac{1}{2}E(1 + \cos\omega' t)$$

यानि $\omega' = 2\omega$ या $f' = 2f$ $\quad (\because \omega = 2\pi f)$

9. जब लड़की झूले पर बैठकर झूलती है तब दोलनकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

जब लड़की खड़ी होती है तो l का मान कम हो जाता है तथा दोलनकाल घट जाता है।

11. वायु में, $g_{eff} = g$

जल में, $$g_{eff.} = g - \frac{\text{उत्प्लावन बल}}{\text{द्रव्यमान}} = g - \frac{d_w}{d_b}g = \frac{g}{4}$$

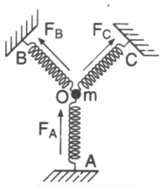
अब $$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{eff.}}}, \text{ अत: } 2t_0 = t$$

12. $$t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}, t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \text{ और } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eff.}}}$$

जब स्प्रिंगों को श्रेणीक्रम में जोड़ा जाता है,

$$\frac{1}{k_{eff.}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{या} \quad T^2 = t_1^2 + t_2^2$$

13. O पर स्थित m द्रव्यमान वाले कण को A की दिशा में मान y से धकेला जाता है, तब स्प्रिंग A, y से संपीडित होती है, जबकि स्प्रिंग B और C, $y' = y\cos 45°$ से खिंचती हैं। अत: OA की दिशा में द्रव्यमान m पर कुल प्रत्यानयन बल,



15. $$K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left(1 - \frac{y^2}{A^2}\right)$$

जब $$y = \frac{A}{2}, K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3E}{4} \quad \left(\text{जहाँ } E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\right)$$

16. बल नियतांक k_1 वाली पहली दो समान स्प्रिंगों के समान्तर संयोजन के लिए प्रभावी स्प्रिंग नियतांक $k_p = 2k_1$

अब, नियतांक k_p और k_2 वाली स्प्रिंगों को श्रेणीक्रम में जोड़ा गया है। अत: इस संकाय का बल नियतांक या स्प्रिंग नियतांक,

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_2}$$

$$\therefore \quad k_s = \left(\frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$$

17. सरल आवर्त गति में कण की कुल ऊर्जा नियत रहती है, अत: विकल्प (c) सही है।

18. गिरने की ऊँचाई $l(1 - \cos\theta)$ है।

$$\therefore \quad Mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}Mv^2$$

या $$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}$$

20. ढाल का कोई महत्व नहीं है। दोलनकाल $T = 2\pi\sqrt{(M/2k)}$

21. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K}}$$

जहाँ μ = रिड्यूस्ड द्रव्यमान (reduced mass)

$$= \frac{6\times 3}{6+3} = 2 \text{ किग्रा}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{2\pi^2}} = 2 \text{ सेकण्ड}$$

22. $x = 3\sin\omega t$, $y = 4\sin\omega t$

परिणामी सरल आवर्त गति :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5\sin\omega t$$

अत: परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम $= 5$

23. व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य

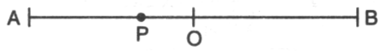
= घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य

$= 2\mu mg(2A)$

$= 2\times 1\times 10\times 10\times 2\times 10^{-2}$ जूल

$= 4$ जूल

24.



चित्र ES-4.1

P से A तक तथा वापस A तक आने में लगा समय = 0.5 सेकण्ड

P से B तक तथा वापस B तक आने में लगा समय = 1.5 सेकण्ड

T = दोलन काल = 0.5 + 1.5

= 2.00 सेकण्ड

O से P तक आने में लगा समय

$$= 0.5 - \frac{0.5}{2} = \frac{0.5}{2} \text{ सेकण्ड}$$

माना कि सरल आवर्त गति की समीकरण है :

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$\therefore \quad v = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\frac{2\pi t}{T}$$

$$\therefore \quad A\times\frac{2\pi}{T} = v_{max} = \frac{v}{\cos\frac{2\pi t}{T}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{\cos\frac{2\pi}{2}\times\frac{0.5}{2}} = 6 \text{ मी/से}$$

25. **प्रथम स्थिति में,**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \text{ तथा } A = \frac{mg}{K}$$

$$\therefore \quad A\times T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\times\frac{mg}{K} = 8$$

द्वितीय स्थिति में,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$$

$$A_1 = \frac{mg}{K_1 + K_2}$$

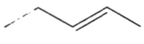
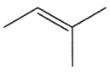
जहाँ $K_1 = K_2 = 2K$

$$\therefore \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4K}} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$A_1 = \frac{mg}{4K}$$

$$\therefore \quad A_1T_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{K}} \times \frac{mg}{4K} = \frac{AT}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

CHEMISTRY

26. (*d*)  तथा  शृंखला समावयवी है।

27. (*c*) नाइट्रोएथेन चलावयवता प्रदर्शित करता है।

$$CH_3CH_2-N{\overset{\nearrow O}{\underset{\searrow O}{}}} \rightleftharpoons CH_3CH{=}N{\overset{\nearrow O}{\underset{\searrow OH}{}}}$$

नाइट्रो रूप   ऐसी रूप

28. (*d*) पेन्टिल ऐल्कोहॉल के निम्न आठ समावयवी सम्भव हैं

(i) $CH_3CH_2CH_2CH_2CH_2H$ — *n*-पेन्टेनॉल

(ii) $CH_3CH_2CH_2\underset{|}{\overset{}{C}}H-CH_3$ (OH नीचे) — 2-पेन्टेनॉल

$$CH_3CH_2CH_2\underset{\underset{OH}{|}}{C}H-CH_3$$

(iii) $CH_3-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{C}H-CH_2-CH_3$ — 3-पेन्टेनॉल

(iv) $CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}H-CH_2OH$ — 2-मेथिलब्यूटेनॉल

(v) $CH_3-CH_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{\overset{OH}{|}}{C}}-CH_3$ — 2-मेथिलब्यूटेन-2-ऑल

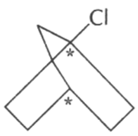
(vi) $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}H-CH_2-CH_2OH$ — 3-मेथिलब्यूटेनॉल

(vii) $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-CH_2OH$ — 2,2-डाइमेथिलप्रोपेनॉल

(viii) $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}H-\underset{\underset{OH}{|}}{C}H-CH_3$ — 3-मेथिलब्यूटेन-2-ऑल

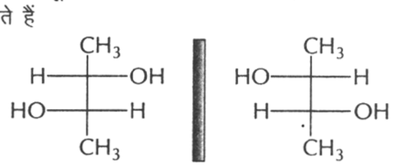
29. (*d*) चलावयवी, मध्यावयवी हो भी सकते हैं और नहीं भी। ये वास्तव में क्रियात्मक समावयवी होते हैं। चलावयवता, अम्ल तथा क्षार द्वारा उत्प्रेरित होती है। शृंखला तथा स्थान समावयवता एक साथ सम्भव नहीं हैं।

30. (*c*) चार भिन्न परमाणुओं/समूहों से जुड़ा कार्बन परमाणु किरैल परमाणु कहलाता है। दिये गये यौगिक में किरैल कार्बन परमाणुओं की संख्या 2 (*) है।



31. (*c*) अध्यारोपित होने वाले यौगिक जो प्रतिबिम्ब रूप नहीं होते, अप्रतिबिम्ब रूप समावयवी कहलाते हैं। अतः I तथा II **अप्रतिबिम्ब** रूप समावयवी हैं।

32. (*b*) किसी यौगिक के प्रकाशिक समावयवी जो अध्यारोपित नहीं होते परन्तु एक दूसरे के प्रतिबिम्ब रूप होते हैं, **प्रतिबिम्ब रूप समावयवी** कहलाते हैं



33. (*c*) 34. (*a*) 35. (*d*)

36. (*d*) ब्यूटेन-2-ऑन $CH_3-\overset{\overset{O}{||}}{C}-CH_2-CH_3$ तथा डाइएथिल ईथर $CH_3CH_2-O-CH_2-CH_3$ समावयवी नहीं हैं क्योंकि दोनों का अणुसूत्र समान नहीं है।

37. (*d*) ब्यूट-2-ईन तथा ब्यूट-1-आईन का अणुसूत्र समान नहीं है अतः दोनों समावयवी नहीं हैं।

$CH_3-CH_2-C{\equiv}CH$ ब्यूट-1-आईन (C_4H_6) $CH_3-CH{=}CH-CH_3$ ब्यूट-2-आईन (C_4H_8)

38. (*b*)

39. (*a*) $CH_3COC_3H_7$ मध्यावयवता प्रदर्शित करता है।

$$CH_3-\overset{\overset{O}{||}}{C}-CH_2CH_2CH_3,$$

$$CH_3-\overset{\overset{O}{||}}{C}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}H-CH_3 \quad \text{तथा} \quad CH_3CH_2-\overset{\overset{O}{||}}{C}-CH_2CH_3$$

40. (*b*) ऐल्केन, बिना क्रियात्मक समूह वाले संतृप्त हाइड्रोकार्बन होते हैं अतः ये शृंखला समावयवता ही प्रदर्शित कर सकते हैं।

41. (*b*) (I) $H-\underset{\underset{H}{|}}{\overset{\overset{H}{|}}{C}}-\underset{\underset{Cl}{|}}{\overset{\overset{H}{|}}{C}}-Cl$ (1,1-डाइक्लोरो एथेन)

(II) $H-\underset{\underset{Cl}{|}}{\overset{\overset{H}{|}}{C}}-\underset{\underset{Cl}{|}}{\overset{\overset{H}{|}}{C}}-H$ (1, 2-डाइक्लोरो एथेन)

दोनों स्थान समावयवी हैं।

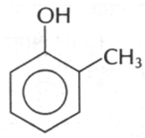
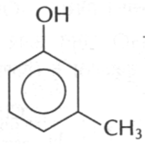
42. (*d*) ऐल्काइनो को छोड़कर, शृंखला समावयवता प्रदर्शित करने के लिए अणु में चार या चार से अधिक कार्बन परमाणु होने चाहिए।

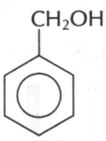
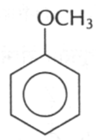
43. (*a*) C_4H_8 अणुसूत्र वाली ऐल्कीन के निम्न समावयवी सम्भव हैं

(i) $CH_3-CH_2-CH{=}CH_2$ (ii) $CH_3-CH{=}CH-CH_3$

(iii) $\overset{H_3C}{\underset{H}{}}{>}C{=}C{<}\overset{CH_3}{\underset{H}{}}$ (iv) $\overset{H_3C}{\underset{H}{}}{>}C{=}C{<}\overset{H}{\underset{CH_3}{}}$

(v) $CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}{=}CH_2$

44. (*d*) (i)  (ii)  (iii) 

(iv)  (v) 

45. (*d*) (i) $CH_3CH_2CH_2CH_2OH$. (ii) $CH_3CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{C}H-CH_3$

(iii) $CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}H-CH_2OH$ (iv) $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-OH$

46	3	47	6	48	4	49	4	50	4

MATHEMATICS

51. (b) $\sin^{-1}\frac{4}{5} + 2\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right)$

$$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \cot^{-1}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$$

52. (b) $\cot^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) + \left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\right)}{\left(\cos\frac{1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) - \left(\cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x\right)}\right]$

$$= \cot^{-1}\left(-\cot\frac{1}{2}x\right)$$

$$= \cot^{-1}\cot\left(\pi - \frac{1}{2}x\right) = \pi - \frac{1}{2}x$$

53. (a) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^{-1}\left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$$= \cos^{-1}\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$[\because \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x]$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

54. (b) दिया है, $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x = \cos^{-1}0$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

उपर्युक्त समीकरण एक सर्वसमिका होगी, यदि

$x = \frac{2}{5} \qquad \left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$

55. (a) $\sin\left[\tan^{-1}(-\sqrt{3}) + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left[-\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \pi - \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$[\because \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$ तथा $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x]$

$$= \sin\left[-\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

56. (d) $x = \tan\theta$ रखने पर,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\tan^{-1}x = 4$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1}x = 8$

$\Rightarrow \quad x = \tan 8$

57. (c) दिया है, $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1-x) \Rightarrow -2\sin^{-1}x = \cos^{-1}(1-x)$

$\left[\because \sin^{-1}(1-x) + \cos^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \cos(-2\sin^{-1}x) = 1-x$ (दोनों पक्षों की $\cos x$ से गुणा करने पर)

$\Rightarrow \quad \cos(2\sin^{-1}x) = 1-x \qquad [\because \cos(-x) = +\cos x]$

$\Rightarrow \quad [1 - 2\sin^2(\sin^{-1}x)] = 1-x \qquad [\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x]$

$\Rightarrow \quad 1 - 2[\sin(\sin^{-1}x)]^2 = 1-x \qquad [\because \sin^2 x = (\sin x)^2]$

$\Rightarrow \quad 1 - 2x^2 = 1 - x \Rightarrow 2x^2 - x = 0$

$\Rightarrow \quad x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$

या $\quad 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ या $\frac{1}{2}$

लेकिन $x = \frac{1}{2}$ दिए गए समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है। इसलिए $x = 0$

58. (c) $\tan^{-1}\left(\frac{c_1x - y}{c_1y + x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c_2 - c_1}{1 + c_2c_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c_3 - c_2}{1 + c_3c_2}\right) + \ldots + \tan^{-1}\frac{1}{c_n}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{x}{y} - \frac{1}{c_1}}{1 + \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{c_1}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}}{1 + \frac{1}{c_1c_2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}}{1 + \frac{1}{c_2c_3}}\right) + \ldots + \tan^{-1}\frac{1}{c_n}$$

$$= \tan^{-1}\frac{x}{y} - \tan^{-1}\frac{1}{c_1} + \tan^{-1}\frac{1}{c_1} - \tan^{-1}\frac{1}{c_2} + \tan^{-1}\frac{1}{c_2} - \tan^{-1}\frac{1}{c_3} + \ldots + \tan^{-1}\frac{1}{c_{n-1}} - \tan^{-1}\frac{1}{c_n} + \tan^{-1}\frac{1}{c_n}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

59. (a) $\sum_{m=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{2m}{m^4 + m^2 + 2}\right)$

$$= \sum_{m=1}^{n}\tan^{-1}\left[\frac{2m}{1 + (m^2+m+1)(m^2-m+1)}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\tan^{-1}\left[\frac{(m^2+m+1) - (m^2-m+1)}{1 + (m^2+m+1)(m^2-m+1)}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n}[\tan^{-1}(m^2+m+1) - \tan^{-1}(m^2-m+1)]$$

$$= (\tan^{-1}3 - \tan^{-1}1) + (\tan^{-1}7 - \tan^{-1}3) + (\tan^{-1}13 - \tan^{-1}7) + \ldots + [\tan^{-1}(n^2+n+1) - \tan^{-1}(n^2-n+1)]$$

$$= \tan^{-1}\frac{n^2+n+1-1}{1 + (n^2+n+1)\cdot 1} = \tan^{-1}\left(\frac{n^2+n}{2+n^2+n}\right)$$

60. (a) $\because \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+r+r^2}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{r+1-r}{1+r(r+1)}\right\}$

$$= \tan^{-1}(r+1) - \tan^{-1}(r)$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{n}[\tan^{-1}(r+1) - \tan^{-1}(r)]$$

$$= \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(0) = \tan^{-1}(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+r+r^2}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

61. (a) हम जानते हैं कि,

$$|\sin^{-1}x| \le \frac{\pi}{2}$$

अतः दिया गया सम्बन्ध

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \frac{3\pi}{2}$$

सम्भव होगा जब

$$\sin^{-1}x = \sin^{-1}y = \sin^{-1}z = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \quad x = y = z = 1$

$$\therefore x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}$$

$$=1+1+1-\frac{9}{1+1+1}$$

$$=3-\frac{9}{3}=0$$

62. (a) चूँकि x, y तथा z समान्तर श्रेणी में हों, तब

$$2y = x + z$$

जबकि $\tan^{-1} x, \tan^{-1} y$ तथा $\tan^{-1} z$ समान्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore \quad 2\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} z$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x+z}{1-xz}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{x+z}{1-y^2} = \frac{x+z}{1-xz} \Rightarrow y^2 = xz$

$\because x, y$ तथा z समान्तर-गुणोत्तर श्रेणी में हों।

$\therefore \quad x = y = z$

63. $(d) \because \quad \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

64. (b) हमें सिद्ध करना है कि प्रत्येक $n \in N$ के लिए,

$$P(n) = A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$$

माना $n = 1$,

$$P(1) = A^1 = \begin{bmatrix} 1+2(1) & -4(1) \\ 1 & 1-2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

जोकि $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है अर्थात्

$$P(k) = A^k = \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \quad \ldots(ii)$$

माना $\quad n = k + 1$,

तब $\quad P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2k+3 & -4k+4 \\ k+1 & -2k-1 \end{bmatrix}$$

अब, $\quad A^{k+1} = A^k A^1$

$$= \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$= \begin{bmatrix} (1+2k)\cdot 3 + (-4k)\cdot 1 & (1+2k)\cdot(-4) + (-4k)\cdot(-1) \\ k\cdot 3 + (1-2k)\cdot 1 & k\cdot(-4) + (1-2k)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2k & -4-4k \\ k+1 & -1-2k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

अतः यदि $n=k$ के लिए परिणाम सत्य हो, तो $n = k + 1$ के लिए भी परिणाम सत्य होगा।

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से, $P(n) = A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$ प्रत्येक $n \in N$ के लिए सत्य है।

65. (c) दिया है, $\quad A^2 = I$

$\therefore \quad AA = I$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \alpha\beta \\ \alpha\gamma - \gamma\alpha & \gamma\beta + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$\alpha^2 + \beta\gamma = 1$$

$\Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta\gamma - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

66. (a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

तथा $\quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A\cdot(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A\cdot(\text{adj } A) = I$

परन्तु $\quad A\cdot(\text{adj } A) = \lambda I$

$\Rightarrow \quad \lambda = 1$

67. (a) यहाँ, $\quad |A| = 3$, $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad (A^{-1})^3 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

68. (d) दिया है, $\quad AB = BA$

सिद्ध करना है $\quad AB^n = B^nA$

$n = 1$ के लिए समी (ii) सत्य है।

माना $n=m$ के लिए समी (ii) सत्य है

अर्थात् $\quad AB^m = B^mA$

अब, $n = m + 1$ के लिए,

(आव्यूह गुणनफल का साहचर्य नियम)

$= (B^mA)B$ [समी (iii) से]

$= B^m(AB) = B^m(BA)$ [समी (i) से]

$= (B^mB)A = B^{m+1}A$

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से समी (ii), $\forall n \in N$ के लिए सत्य है।

69. (a) दिया है, $\quad \begin{bmatrix} x+y & 2x+z \\ x-y & 2z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad x + y = 4 \quad \ldots(i)$

$x - y = 0 \quad \ldots(ii)$

$2x + z = 7 \quad \ldots(iii)$

तथा $\quad 2z + w = 10 \quad \ldots(iv)$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 3, \quad w = 4$$

70. $(c) \because \quad kA = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad k\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2k \\ 3k & -4k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad 2k = 3a, \quad 3k = 2b, \quad -4k = 24$

$\Rightarrow \quad a = \frac{2k}{3}, \quad b = \frac{3k}{2}, \quad k = -6$

$\therefore \quad a = -4, \quad b = -9, \quad k = -6$

71. (a) दिया है, $\quad A^2 = kA - 2I \Rightarrow AA = kA - 2I$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$

समान आव्यूह के संगत अवयव को बराबर करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$3k - 2 = 1 \Rightarrow k = 1$$
$$-2k = -2 \Rightarrow k = 1$$
$$4k = 4 \Rightarrow k = 1$$
$$-4 = -2k - 2 \Rightarrow k = 1$$

अतः $k = 1$

72. (b) $\Delta_r = \begin{vmatrix} 2r-1 & {}^mC_r & 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$

$$\therefore \sum_{r=0}^{m} \Delta_r = \begin{vmatrix} \sum_{r=0}^{m}(2r-1) & \sum_{r=0}^{m} {}^mC_r & \sum_{r=0}^{m} 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m^2-1 & 2^m & m+1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix} = 0 \quad (\because \text{दो पंक्तियाँ समान हैं})$$

73. (d) माना सारणिक $A = \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$A = \cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - 0)$$
$$- \cos\alpha\sin\beta(-\cos\alpha\sin\beta - 0)$$
$$- \sin\alpha(-\sin^2\beta\sin\alpha - \cos^2\beta\sin\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$= \cos^2\alpha(1) + \sin^2\alpha(1)$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

74. (c) दिया है, $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

सारणिक का प्रसार करने पर,

$$2x^2 - 40 = 18 + 14$$
$$\Rightarrow 2x^2 = 40 + 32 = 72$$
$$\Rightarrow x^2 = 36$$
$$\therefore x = \pm 6$$

75. (a) माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(1 - \log_z y \log_y z) - \log_x y(\log_y x - \log_y z \log_z x)$$
$$+ \log_x z(\log_y x \log_z y - \log_z x)$$
$$= (1 - \log_z z) - \log_x y(\log_y x - \log_y z \log_z x)$$
$$+ \log_x z(\log_y x \log_z y - \log_z x)$$
$$= (1 - 1) - (1 - \log_x y \log_y x) + (\log_x z \log_z x - 1) = 0$$
$$(\because \log_x y \log_y x = 1)$$
$$= 0 - (1 - 1) + (1 - 1) = 0$$